



Concursul Național de Matematică „Laurențiu Panaitopol”, 21.03.2025
Clasa a VI-a

Punctaj din oficiu 16p

1. Trei automobile concurează pe o pistă circulară, rulând cu viteză constantă și pornind în același timp de la start. Se constată că, atunci când automobilul A a parcurs 2 ture complete, automobilul B a parcurs exact 1,5 ture, iar când automobilul B a parcurs 2 ture complete, automobilul C a parcurs exact 1,5 ture. Demonstrați că în momentele când automobilele sunt, toate trei, unul lângă altul, atunci ele trec prin dreptul startului. După câte ture parcurse de A se întâmplă prima oară acest lucru?

Soluție. Pentru ca cele trei automobile să fie unul lângă altul, trebuie ca A să treacă pe lângă B.... **6p**

Observăm că, după ce A a parcurs 4 ture complete, B parcurge exact 3 ture, deci A face cu o tură în plus față de B exact atunci când A trece pe la start a patra

2. Este posibil să împărțim mulțimea divizorilor lui $10!$ în două submulțimi disjuncte A, B astfel încât produsul elementelor lui A să fie egal cu produsul elementelor lui B ? Justificați răspunsul! (notăm $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10$.)

Soluție. $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ **6p**

Divizorii lui $10!$ sunt numerele de forma d sau $7d$, unde d este un divizor al numărului $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$... **3p**

3. Ana s-a gândit la 4 numere întregi, apoi a scris pe o hârtie cele 6 sume care se obțin adunând câte 2 din numerele la care s-a gândit. Cinci dintre sumele scrise de Ana sunt $-10, -6, -2, 3$ și 7 .

a) Cât este cea de a șasea sumă?

b) Care sunt numerele la care s-a gândit Ana?

Soluție. a) Fie S suma celor 4 numere. Atunci, adunând în mod convenabil câte 2 dintre sumele scrise, obținem rezultatul S . Dintre sumele știute, singurele care corespund sunt $-10 + 7$ și $-6 + 3$, deci $S = -3$

4. Fie triunghiul echilateral ABC , punctele D și E pe latura BC astfel încât $BD = DE = EC$ și punctul F pe latura AC astfel încât $FC = 2 \cdot AF$. Arătați că $\angle ADF + \angle AEF = 30^\circ$.

Soluție. Avem $AC = 3 \cdot AF$, $BC = 3 \cdot BD$ și $AC = BC$, deci $CF = CD$ **3p**

Rezultă $\angle CDF = 60^\circ = \angle CBA$, deci $DF \parallel AB$. Astfel, $\angle ADF = \angle BAD$ **6p**

Apoi $\triangle BAD \equiv \triangle CAE$ (LUL) implică $\angle CAE = \angle BAD$, deci $\angle ADF = \angle CAE$ **6p**

Rezultă $\angle ADF + \angle AEF = \angle CAE + \angle AEF = \angle EFC = 30^\circ$, deoarece FE este mediană în triunghiul echilateral DCF **6p**

oară. Pentru ca A să treacă pe lângă B, trebuie ca A să facă un număr întreg de ture suplimentare față de B, ceea ce nu se poate întâmpla decât atunci când A trece pe la start după un număr de ture complete. Astfel, automobilele nu pot fi unul lângă altul decât când trec prin dreptul startului..... **9p**

Pentru ca A să treacă pe lângă B, trebuie ca A să facă n ture complete, unde n este multiplu de 4. Analog B trece pe lângă C atunci când B trece pe la start după un număr m de ture complete, unde m este multiplu de 4. După ce A parcurge $n = 4t$ ture, B parcurge $3t$ ture deci t trebuie să fie multiplu de 4. Cel mai mic t pentru care se întâmplă aceasta este 4, caz în care A parcurge 16 ture..... **6p**

Mulțimea divizorilor lui $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ are $n = 9 \cdot 5 \cdot 3$ elemente **3p**

Arătăm că împărțirea cerută nu este posibilă. Dacă ea ar fi posibilă, atunci produsul P al tuturor divizorilor lui $10!$ ar fi pătrat perfect. Pe de altă parte, $P = 7^n \cdot p^2$, unde p este produsul divizorilor lui $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Cum n este impar și p nu este divizibil cu 7, P nu poate fi pătrat perfect **9p**

și a șasea sumă este $-3 - (-2) = -1$ **9p**

b) Fie $a < b < c < d$ numerele la care s-a gândit Ana. Atunci $a + b < a + c < a + d < b + d < c + d$ și $a + b < a + c < b + c < b + d < c + d$, deci $a + b = -10$, $a + c = -6$ iar $a + d$ poate fi -2 sau -1 **6p**

În primul caz $3 \cdot a + b + c + d = -18$, de unde $2 \cdot a - 3 = -18$ – imposibil, deoarece a este întreg. **2p**

În al doilea caz $3 \cdot a + b + c + d = -17$, de unde $2 \cdot a - 3 = -17$, $a = -7$, $b = -3$, $c = 1$, $d = 6$ **4p**

